Cálculo II Examen IV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo II
Examen IV

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Cálculo II.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor María Victoria Velasco Collado.

Descripción Primer Parcial. Derivación. Temas 1-4.

Fecha 22 de abril de 2022.

Ejercicio 1. [2 puntos] Dada $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, demostrar las siguientes afirmaciones:

1. Si f es derivable en $\mathbb{R}^+$ y $|f'(x)| \leq f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^+$, entonces:

$$|\ln(f(y)) - \ln(f(x))| \leq |y - x| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Sea $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \ln x$, y consideramos $g \circ f$.

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Usando que $|f'(x)| \leq f(x)$, tenemos que:

$$|(g \circ f)'(x)| = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| \leq \frac{f(x)}{|f(x)|} \leq 1$$

Por tanto, como su derivada está acotada, tengo que $g \circ f$ es lipschitziana, con constante de Lipschitz menor o igual a la cota de la derivada; es decir, $M_0 \leq 1$.

Por tanto, por ser lipschitziana, tengo que:

$$|(g \circ f)(y) - (g \circ f)(y)| \leq M_0|y - x| \leq |y - x| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Es decir, ha quedado demostrado.

2. Si f es dos veces derivable en $\mathbb{R}^+$, entonces $\ln(f(x))$ es cóncava hacia arriba si y solo si:

$$f''(x)f(x) - f'(x)f'(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Sea $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \ln x$, y consideramos $g \circ f$.

Como f es dos veces derivable, tengo que g también lo es. Sé que $(g \circ f)(x)$ es cóncava hacia abajo si y solo si $(g \circ f)''(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$. Calculo por tanto la segunda derivada:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$(g\circ f)''(x) = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} \geq 0 \Longleftrightarrow f''(x)f(x) - (f'(x))^2 \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Por tanto, tenemos que el resultado es cierto.

Ejercicio 2. [2 puntos] Probar que $\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$, para cada $x > -1$. ¿Es constante la función $f(x) := \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arctan x$ en su dominio de definición?

Su dominio de definición es su dominio maximal. El dominio de $\arctan x$ es $\mathbb{R}$, por lo que:

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Veamos ahora si es constante. f es derivable en $\mathbb{R}-\{-1\}$, por lo que calculo su primera derivada:

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\frac{-1(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2}+\frac{1}{1+x^2}=$$
$$=\frac{-2}{(1+x)^2+(1-x)^2}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{-2}{2(1+x^2)}+\frac{1}{1+x^2}=0\qquad\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$$

Por tanto, tengo que f es constante en cada una de las restricciones a $]-1,+\infty[$ y $]-\infty,-1[$. No obstante, no tenemos asegurado que la imagen sea igual a ambos lados de $x=-1$.

$$f(0)=\arctan 1+\arctan 0=\frac{\pi}{4}+0=\frac{\pi}{4}$$
$$f(-2)=\arctan(-3)+\arctan(-2)<0$$

Por tanto, tenemos que **no** es constante en su dominio de definición.

$$Im(f_{|]-1,+\infty[})=\frac{\pi}{4}\qquad Im(f_{|]-\infty,-1[})=\arctan(-3)+\arctan(-2)<0$$

Además, podemos afirmar que, efectivamente, $\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+\arctan x=\frac{\pi}{4}$, para cada $x>-1$.

Ejercicio 3. [2 puntos] Mediante el desarrollo de Taylor, calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^3)-\tan^3(x)}{3x^5}.$$

Definimos $f(x)=\operatorname{sen}(x^3)-\tan^3(x)$. Entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^3)-\tan^3(x)}{3x^5}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\cancel{\frac{f(x)-P_{5,0}^f(x)}{x^5}}+\frac{P_{5,0}^f(x)}{x^5}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{P_{5,0}^f(x)}{x^5}$$

Calculamos por tanto los polinomios de Taylor:

$$P_{2,0}^{\operatorname{sen}x}(x)=x\Longrightarrow P_{6,0}^{\operatorname{sen}(x^3)}(x)=x^3=P_{5,0}^{\operatorname{sen}(x^3)}(x)$$

$$P_{5,0}^{\tan x}(x)=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5\Longrightarrow P_{5,0}^{\tan^3 x}(x)=\left[\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5\right)^3\right]_{n=5}=x^3+3\cdot\frac{1}{3}x^5=x^3+x^5$$

Por tanto,

$$P_{5,0}^f(x)=P_{5,0}^{\operatorname{sen}(x^3)}(x)-P_{5,0}^{\tan^3 x}(x)=x^3-x^3-x^5=-x^5$$

En conclusión, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)-\tan^3(x)}{3x^5}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{P_{5,0}^f(x)}{x^5}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{-x^5}{x^5}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}-1=-\frac{1}{3}$$

Ejercicio 4. [**2 puntos**] Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$. Estudiar el comportamiento en $x = 0$ de la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \left(\frac{2a^x + 3b^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}} \qquad (x \in \mathbb{R}^+).$$

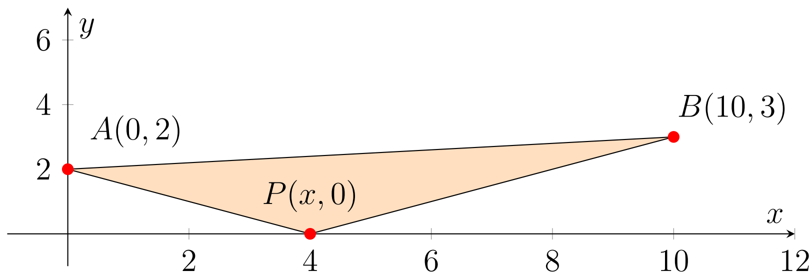
Estudiar su comportamiento en el 0 equivale a calcular el límite si $x \to 0^+$. Por tanto,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2a^x + 3b^x}{5}\right)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln\left(\frac{2a^x+3b^x}{5}\right)}{x}} \overset{Ec.\ 1}{=} e^{\ln\left(\sqrt[5]{a^2b^3}\right)} = \sqrt[5]{a^2b^3}$$

donde previamente he tenido que resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{2a^x+3b^x}{5}\right)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(2a^x + 3b^x) - \ln 5}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H\hat{o}pital}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2a^x \ln a + 3b^x \ln b}{2a^x + 3b^x} = \frac{2\ln a + 3\ln b}{5} = \ln\left(\sqrt[5]{a^2b^3}\right) \quad (1)$$

Ejercicio 5. [**2 puntos**] Para qué punto P del eje de abcisas el perímetro del triángulo de vértices $P = (x, 0)$, $A = (0, 2)$ y $B = (10, 3)$ es menor?



Calculamos la longitud de cada lado del triángulo:

$$\overline{AP} = \sqrt{x^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 + 4} \qquad \overline{AB} = \sqrt{10^2 + 1^2} = \sqrt{101}$$
$$\overline{PB} = \sqrt{(10 - x)^2 + 3^2} = \sqrt{109 + x^2 - 20x}$$

Sea P la función que determina el perímetro:

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow P(x) = \overline{AP} + \overline{AB} + \overline{PB} = \sqrt{x^2+4} + \sqrt{101} + \sqrt{109 + x^2 - 20x} \end{aligned}$$

Como los discriminantes son positivos $\forall x \in \mathbb{R}$, es derivable.

$$P'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{x - 10}{\sqrt{109 + x^2 - 20x}} = 0 \iff$$
$$\iff x\sqrt{109 + x^2 - 20x} = (10-x)\sqrt{x^2+4} \overset{(*)}{\iff} x^2(109+x^2-20x) = (10-x)^2(x^2+4) \iff$$
$$\iff 109x^2 + \cancel{x^4} \cancel{-20x^3} = \cancel{x^4} + 4x^2 + 100x^2 + 400 \cancel{-20x^3} - 80x \iff 5x^2 + 80x - 400 = 0 \iff$$
$$\iff x^2 + 16x - 80 = 0 \iff \begin{cases} x = 4 \\ \cancel{x = -20}, \text{ ya que no cumple } (*) \end{cases}$$

Comprobamos ahora si, efectivamente, es un mínimo relativo.

- <u>Para $x < 4$</u>: $P'(x) < 0 \Longrightarrow P(x)$ estrictamente decreciente.
- <u>Para $x > 4$</u>: $P'(x) > 0 \Longrightarrow P(x)$ estrictamente creciente.

Por tanto, se confirma que es un mínimo relativo. También es absoluto, ya que es el único extremo de una función de clase 1 definida en un intervalo.

Por tanto, el punto que minimiza el perímetro del triángulo es:

$$P(x, 0) = P(4, 0)$$